VECTEURS

Avant d'en venir aux vecteurs proprement dits, faisons un détour par la *mesure algébrique*, dont il m'est apparu au fil des années qu'elle était la meilleure introduction possible aux *vecteurs*. C'était d'ailleurs la façon dont les notions étaient introduites lorsque j'étais élève de quatrième.

I. MESURE ALGÉBRIQUE

VALEUR ABSOLUE

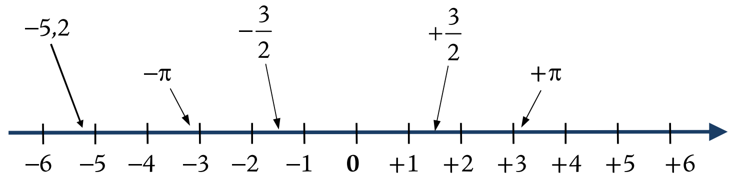
Vous pouvez relire le paragraphe *Valeur Absolue* dans les *Révisions d'Algèbre*.

BIPOINT

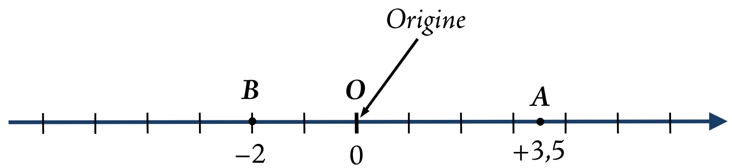
Un **bipoint** est un couple de points, c'est-à-dire deux points, donnés dans un certain ordre. Exemple : $(A;B)$. Rappelons que, dans un *couple*, les deux termes ne sont pas interchangeables, contrairement au cas d'une *paire*.

AXE

Un axe est une droite (par exemple un axe de symétrie). Ici, nous l'entendrons au sens d'axe « gradué », c'est-à-dire un axe sur lequel chaque point est repéré par un *nombre réel*. Considérons une droite. On choisit, sur la droite considérée, un point appelé **origine**, qui sera la position du *zéro*, un sens de parcours et une unité de longueur. Alors, comme nous l'avons vu dans les chapitre sur *Les Ensembles*, chaque point de l'**axe** correspond à un nombre réel et chaque nombre réel est représenté par un point de l'axe :



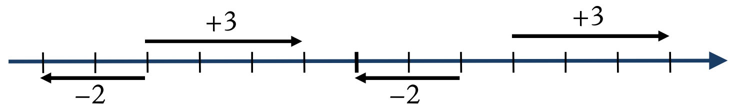
Alors le <u>nombre relatif</u> qui repère un point de l'axe est appelé **abscisse** de ce point. Par exemple, sur le dessin ci-dessous, le point A a pour abscisse $+3,5$; le point B a pour abscisse -2 et le point O est l'origine et a donc pour abscisse le nombre zéro.



À partir d'ici et jusqu'à la fin du paragraphe sur la mesure algébrique, nous nous plaçons sur un axe donné.

REPRÉSENTATIONS D'UN NOMBRE RELATIF

Un nombre relatif peut se représenter, comme nous venons de le voir, par une *position* sur l'axe. Mais on peut l'interpréter aussi comme un *trajet*. Ainsi, le nombre $+3$ s'interprètera : « on <u>avance</u> (sur l'axe) de 3 unités » et le nombre -2 s'interprètera : « on <u>recule</u> de 2 unités ». Peu importe le point de départ. Si l'on représente le trajet par une <u>flèche</u>, cette flèche pourra être placée à différents endroits de l'axe :



Cette interprétation a l'avantage de permettre de définir très simplement l'addition des nombres relatifs, comme étant le trajet qui résulte de deux trajets successifs : on part <u>d'un point quelconque de l'axe</u>. Si l'on avance de 3 unités puis qu'on recule de 2 unités, cela revient, finalement, à n'avoir avancé que d'une unité : $(+3)+(-2) = +1$. On peut évidemment imaginer que l'axe est placé verticalement et penser en terme d'altitude : avec un ascenseur, si l'on monte de trois étages puis qu'on redescend de deux étages, cela revient à n'être monté que d'un étage.

Il est probable (et souhaitable) que l'addition des relatifs vous ait ainsi été présentée au collège. Si ce n'est pas le cas, eh bien, mieux vaut tard que jamais.

Mesure algébrique

Sur un axe donné, prenons deux points A et B. La **mesure algébrique** du *bipoint* $(A;B)$, ou, pourrait-on dire la mesure algébrique <u>de</u> A <u>à</u> B est le <u>nombre relatif</u> qui représente le trajet allant de A à B. On la note $\overline{AB}$ et on lit : « mesure algébrique de A B » (ou « mesure algébrique de A <u>à</u> B »).

Par exemple, sur le dessin ci-dessous, $\overline{AB}=+3$ et $\overline{BA}=-3$.

La *mesure algébrique* est comme une distance, mais munie d'un signe.

Opposé

L'opposé d'un nombre relatif est celui qui est de sens contraire, mais de même valeur absolue. Le trajet qui le représente aura donc le sens contraire, mais la même longueur que le trajet du nombre considéré au départ. Par conséquent, soient deux points A et B sur l'axe. On aura toujours : $\boxed{-\overline{AB} = \overline{BA}}$.

Multiplication par un nombre négatif

Puisque multiplier par -3 revient à multiplier par 3 et à prendre l'opposé (dans l'ordre qu'on veut), on a : $\boxed{-3\overline{AB} = 3\overline{BA}}$.

Relation de Chasles

Par définition de l'addition des nombres relatifs, quels que soient les points A, B et C choisis sur l'axe, on a : $\boxed{\overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AC}}$.

Cette égalité, toujours vraie, se nomme **relation de Chasles** (on prononce « chal ») du nom du mathématicien Michel Chasles.

Abscisse

Notons <u>O l'origine de l'axe</u>. Soit A un point de l'axe, d'abscisse x. On a : $\boxed{x=\overline{OA}}$.

Distance

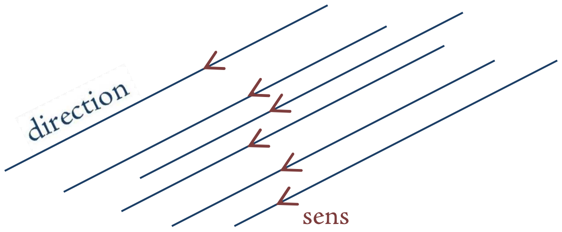
Soient A et B deux points de l'axe. On a : $\boxed{AB = \left|\overline{AB}\right|}$. La distance est la *valeur absolue* de la mesure algébrique.

II. La notion de vecteur

Direction / sens

Dans la langue courante, les mots *direction* et *sens* sont parfois synonymes. En géométrie, la **direction** est la propriété commune à toutes les droites parallèles à une même droite donnée. Une fois qu'une direction est choisie, il ne reste que deux **sens** possibles.

En employant ces mots dans leur sens géométrique, on dirait qu'à un carrefour, choisir une rue, c'est choisir une *direction*. Ensuite, il reste à choisir d'emprunter cette rue dans le *sens* des numéros croissants, ou dans celui des numéros décroissants.



« DÉFINITION »

Le **vecteur** est un objet mathématique qui réunit en sa personne les trois informations d'un « déplacement » : $\begin{cases}\text{direction}\\ \text{sens}\\ \text{distance}\end{cases}$

L'information « distance » s'appelle la **norme** du vecteur. Le déplacement en question se nomme **translation**.

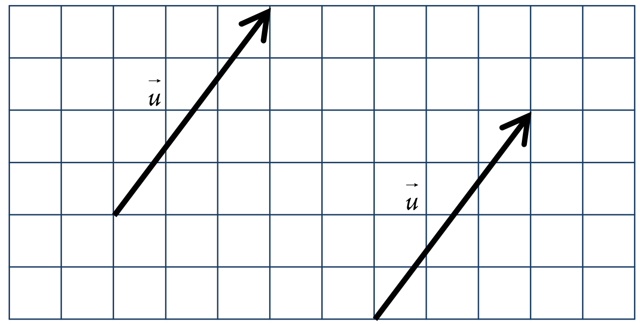
Le mot *vecteur* vient du latin *vehere*, se déplacer, qui a donné aussi le mot *véhicule*. Le *trans* dans *translation* marque aussi un déplacement (comme dans transport).

DÉSIGNATION

Pour bien distinguer les vecteurs des nombres dans les calculs vectoriels (qui mélangent les deux), au lycée, on désigne les vecteurs par une lettre surmontée d'une flèche : « $\vec{u}$ ».

REPRÉSENTATION

On peut représenter un vecteur par une flèche. Mais c'est une flèche dont seules comptent les caractéristiques de direction, sens et distance. La position de la flèche ne compte pas. Ainsi, les deux flèches ci-dessous représentent **<u>le même</u>** vecteur :



« Un segment orienté libre », voilà comment on a parfois défini le vecteur. « Libre », pour signifier qu'il est partout et nulle part à la fois. C'est une définition qui éclaire un peu le concept, mais qui manque singulièrement de rigueur.

EXPRESSION

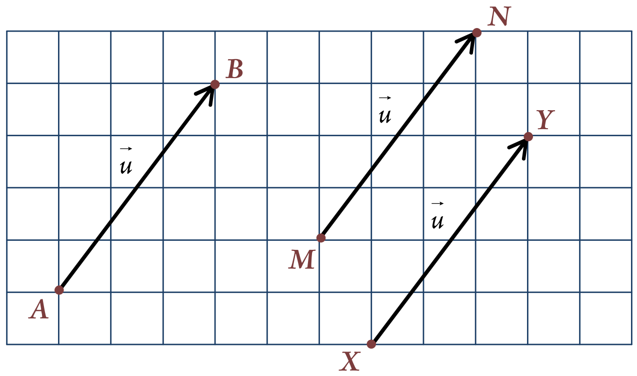
Le vecteur qui donne les informations (direction, sens, distance) permettant d'aller d'un point A à un point B se note : $\boxed{\overrightarrow{AB}}$.

On lit « vecteur A B », mais on pourrait dire aussi « vecteur <u>de</u> A <u>à</u> B » ou vecteur du bipoint $(A;B)$. Cette expression d'un vecteur à partir d'un bipoint qui le représente, j'appellerai cela la notation « **bipointesque** ».

« $\vec{u}$ » est un simple nom, une *désignation* (désigner, c'est montrer du doigt), alors que « $\overrightarrow{AB}$ » est *expression*, formée à partir des désignations « A » et « B ». C'est une construction.

REPRÉSENTANT

Une flèche n'est qu'un dessin et n'a donc pas le statut d'objet mathématique. Son équivalent rigoureux est le *bipoint*. A et B étant deux points du plan (ou, si l'on veut, de l'espace) et $\vec{u}$ étant un vecteur, le bipoint $(A;B)$ est appelé un **représentant** du vecteur $\vec{u}$ lorsque $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$. Un vecteur a une infinité de *représentants*.



Ainsi, sur la figure ci-dessus, les *bipoints* $(A;B)$, $(M;N)$ et $(X;Y)$ sont des *représentants* d'un même vecteur $\vec{u}$. Des bipoints qui représentent un même vecteur sont dits **équipollents**, mot peu usité actuellement. (Du latin *pollens*, puissance, valeur. *Équipollent* est synonyme de *équivalent*.)

S'il fallait donner des noms permettant de différencier les deux points d'un bipoint, on pourrait faire appel au vocabulaire du tir à l'arc. Le premier point serait l'« encoche » et le second la « pointe ». Ou sinon, on pourrait parler d'« origine » et d'« extrémité ».

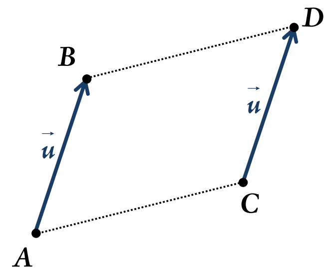
Définitions rigoureuses

Dans l'article *Grandeurs*, sur le site *MathEnSeconde.fr*, vous trouverez exposée la notion de *classe d'équivalence*, qui permet de définir rigoureusement les notions de *direction* et de *vecteur*.

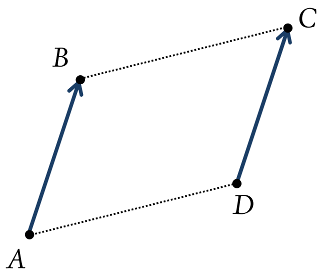
Caractérisation vectorielle du parallélogramme

Soient A, B, C et D quatre points. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **si et seulement si** $AB\underline{D}C$ est un parallélogramme.

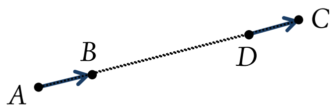
Cela se déduit du fait qu'un parallélogramme est un quadrilatère non croisé qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.



$ABCD$ peut éventuellement être « aplati ». En toute rigueur, lorsqu'un parallélogramme est aplati, ce n'est plus un parallélogramme. Dans ce chapitre, ces parallélogrammes dits *dégénérés* seront considérés quand même comme des parallélogrammes. (La définition du parallélogramme en vigueur dans ce chapitre pourrait être : $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.)



ABCD est un parallélogramme classique

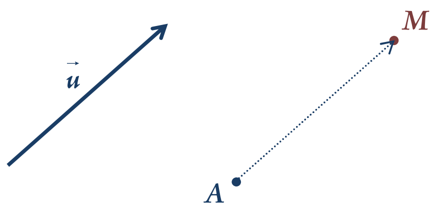


ABCD est un parallélogramme « aplati »

UNICITÉ DU « TRANSLATÉ »

Soient A un point donné et $\vec{u}$ un vecteur donné. Il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

M est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.



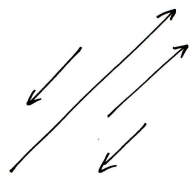
Le théorème traduit le fait que, trois points A, B et C étant donnés, il existe un unique point M tel que $ABMC$ soit un parallélogramme ; ce que l'on peut démontrer facilement par la géométrie classique en utilisant par exemple la définition du parallélogramme, ou sa *caractérisation* par les diagonales (qui se coupent en leurs milieux). Nous parlerons d'unicité du quatrième point d'un parallélogramme pour évoquer ce dont nous venons de parler et dont nous aurons encore besoin plus loin. (Il n'y a unicité que si l'ordre des points est

imposé. Si l'on ne précisait pas… Tiens ! je vous pose la question : trois points non alignés étant donnés, combien y a-t-il de façons de placer un quatrième point de façon que les quatre points soient les sommets d'un parallélogramme ?)

Ce petit théorème sur l'unicité (et l'existence) du « translaté », nous servira plus loin à résoudre des « équations vectorielles ». Il sera important que le point M (qui sera notre inconnue) soit le point d'arrivée du vecteur et le point A (le point donné) le point de départ.

COLINÉARITÉ

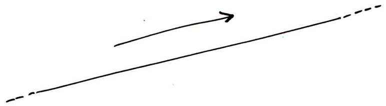
Lorsque des vecteurs ont même *direction* (mais pas forcément même *sens*), on ne dit pas qu'ils sont « parallèles », on dit qu'ils sont **colinéaires**.



Entendez le mot en deux parties : *co* (ensembles) et *linéaires* : on pourrait les représenter *ensembles* sur la même *ligne* droite. De cette façon, vous éviterez d'écrire « ✱collinéaires✱ ».

VECTEUR DIRECTEUR

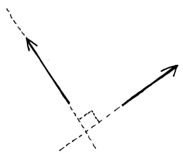
Lorsqu'un vecteur et une droite ont même *direction*, on ne dit pas que le vecteur est « parallèle » à la droite, mais qu'il est un **vecteur directeur** de cette droite. (Nous préciserons plus loin cette définition.)



ORTHOGONALITÉ

On ne dit pas que des vecteurs sont « perpendiculaires », on dit qu'ils sont **orthogonaux**. « $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ » se note : $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v}}$.

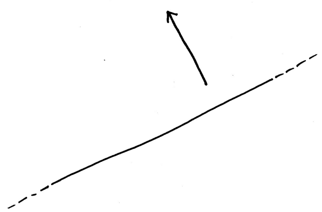
Le mot « perpendiculaire » est réservé aux cas où il y a vraiment une intersection. Or les vecteurs étant des êtres non localisés, ils ne peuvent se couper. Le mot vient du grec : *orthos* (droit) et *gônia* (angle).



Rigoureusement : lorsque deux droites sont *perpendiculaires*, on dit que leurs *directions* sont **orthogonales**. Et lorsque des vecteurs ont des directions orthogonales, eux-mêmes sont dits **orthogonaux**.

VECTEUR NORMAL

Lorsqu'un vecteur et une droite ont des directions orthogonales, le vecteur est dit **normal** à la droite.



NORME

On ne parle pas de la « longueur » d'un vecteurs, mais de sa **norme**. (La norme d'un vecteur, comme nous l'avons déjà dit, c'est l'information *distance* qu'il contient.)

La *norme* de $\vec{u}$ se note : $\boxed{\left\|\vec{u}\right\|}$. On a donc : $\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB}$

La notation ressemble (et ce n'est pas par hasard) à celle de la valeur absolue. La *norme* étant au vecteur ce que la *valeur absolue* est au nombre relatif.

Les mots « normal » et « norme » ont la même étymologie et pourtant des sens bien différents. *Norma*, en latin, veut dire *équerre* (et traduit le *gnômona* grec). D'où l'idée de perpendicularité contenue dans vecteur *normal*. Pour ce qui est du sens de « longueur », c'est beaucoup plus compliqué. On simplifiera en disant que là où il y a l'équerre, la règle n'est pas loin (par le sens figuré, par exemple).

PLAN VECTORIEL

L'ensemble de tous les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points du plan est appelé **plan vectoriel**.

UTILITÉ

Les mathématiques, comme la littérature ou la philosophie n'existeraient pas sans une mise à distance des préoccupations utilitaristes. Lorsqu'à l'occasion de l'introduction d'une notion, on pose la question : « à quoi ça sert ? », c'est en général qu'on trouve la notion inintéressante <u>en soi</u>. Si par exemple, on vous apprend un jeu qui vous amuse, la question de son utilité ne vous viendra même pas à l'esprit. C'est même en grande partie la gratuité du jeu qui en fait un jeu. De plus, le « à quoi ça sert » peut avoir plusieurs sens : à quoi ça sert en mathématiques ou à quoi ça sert « dans la réalité » ou encore « à quoi ça va me servir dans la vie ? ». Pour ce qui est de l'intérêt intrinsèque[1] du vecteur, il faut tout de même attendre encore un peu pour juger. Mais personne ne vous oblige à aimer les vecteurs. L'utilité des vecteur dans votre vie, il est bien possible qu'elle soit limitée si vous ne travaillez pas dans le secteur scientifique.

En physique, les vecteurs sont abondamment utilisés, pour représenter des *forces*, des *vitesses*, des *accélérations* et bien d'autres choses encore.

En mathématiques, le vecteur est un être intermédiaire entre la figure et le nombre. Il permet d'introduire l'algèbre en mathématique d'une façon plus efficace encore que les coordonnées. Mais pour qu'il soit opératoire, il faut le munir d'opérations. Ces opérations vont « encoder » des théorèmes de géométrie dans leurs propriétés algébriques, de sorte que les calculs vectoriels pourront peu à peu remplacer des démonstrations de géométrie classique avec un gain en efficacité et une perte en intuition et en esthétique. Ces opérations, il faut les définir de façon pertinente et efficace. Commençons par une opération que nous nommerons addition, car elle ressemble beaucoup à l'addition des relatifs et qu'en plus, elle en a les propriétés algébriques.

[1] Qui appartient en propre à l'objet considéré, à son essence. S'oppose à *extrinsèque* (plus rare). "Ce fétiche n'a aucune valeur intrinsèque et ne peut avoir tenté qu'un collectionneur" *L'oreille cassée*. (*Tintin*.)

III. Addition vectorielle

Principe

Comme la somme des relatifs, la somme de deux vecteurs représente le trajet résultant de deux trajets successifs.

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On choisit un point A quelconque du plan. Soit B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$. Soit C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.
On pose : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

On choisit un point A de départ, quelconque. On se déplace selon le premier vecteur. On arrive ainsi à un point B. Puis on se déplace selon le second vecteur et l'on arrive à un point C. Le vecteur somme est le vecteur qui dit comment aller directement de A à C.

Pour apprendre cette définition, il faut vous entraîner chez vous à la réciter par écrit. Ce n'est pas du par cœur, mais changer un mot à la légère peut rendre l'ensemble aberrant.

Ainsi, en récitant ce théorème, de nombreux élèves écrivent « donc » à la place du « on pose ». C'est une erreur qui n'est pas anodine. Leur « donc » trahit le fait qu'ils prennent cette définition pour un théorème (ou même une démonstration !), ce qui est un contresens. Connaissez-vous vraiment le sens du « on pose » ?

Il y a certes un théorème caché : pour que cette définition soit valable, il est fondamental que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ final ne dépende pas du choix du point A initial. Énonçons puis démontrons ce théorème.

$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{AC} \text{ (de la définition précédente) ne dépend pas du point } A \text{ choisi.}}$

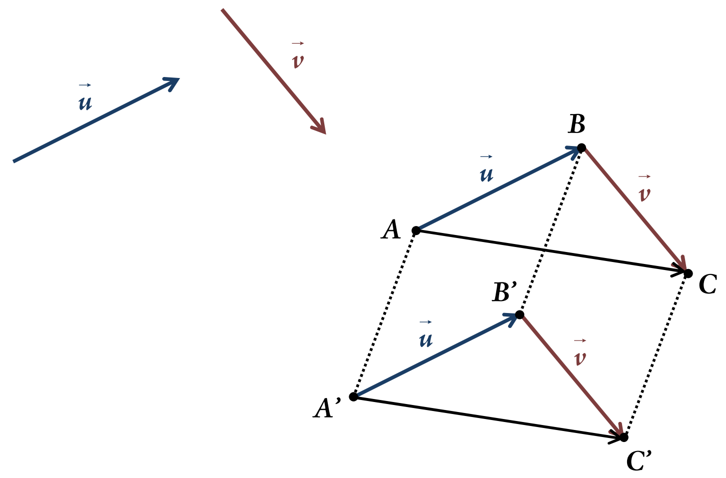
Démonstration

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Soient A et A' deux points quelconques du plan.

Soient B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et B' tel que $\overrightarrow{A'B'} = \vec{u}$.

Soient C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ et C' tel que $\overrightarrow{B'C'} = \vec{v}$.

Il s'agit de prouver que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. Je vous laisse ça en exercice.



Relation de Chasles

<u>Quels que soient</u> les points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Démonstration

Cette relation est simplement le corollaire de la définition de la somme de deux vecteurs.

Remarque

On aura souvent à utiliser la relation de Chasles dans l'autre sens, pour « décomposer » un vecteur en intercalant un nouveau point : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.

Opposé

L'opposé d'un vecteur est le vecteur ayant même norme et même direction, mais sens opposé. L'opposé de $\vec{u}$ se note $-\vec{u}$.

On a donc : $\boxed{-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}}$

Vecteur nul

Lorsqu'on somme deux vecteurs opposés, il faut bien accorder encore une existence au résultat obtenu et lui-même lui octroyer le statut de vecteur. C'est ainsi qu'on est contraint d'admettre parmi les vecteurs, un être un peu à part : A étant un point quelconque, $\overrightarrow{AA}$ est encore considéré comme un vecteur. Il se nomme le **vecteur nul** et se note : $\vec{0}$. Le vecteur nul est censé avoir :

- Toutes les *directions* à la fois
- Pas de *sens*
- Une *norme* égale à 0.

Bref, par définition : $\boxed{\overrightarrow{AA} = \vec{0}}$

Le *vecteur nul* est donc *colinéaire* (et *orthogonal*) à tous les vecteurs.

Le vecteur nul est son propre opposé : $\boxed{-\vec{0} = \vec{0}}$.

Le vecteur nul permet de caractériser vectoriellement l'égalité de deux points : $\boxed{\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow M = A}$

Seul le vecteur nul a une norme nulle : $\boxed{\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}}$

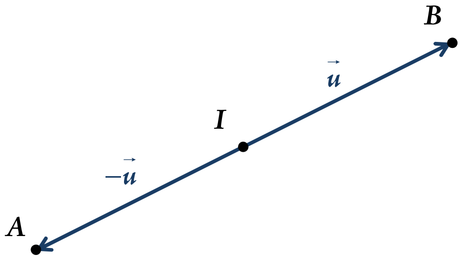
L'existence du vecteur nul nous oblige à préciser la notion déjà abordée de *vecteur directeur* d'une droite :

VECTEUR DIRECTEUR

Un **vecteur directeur** d'une droite est un vecteur **non nul** qui a même direction que cette droite.

CARACTÉRISATION VECTORIELLE DU MILIEU

« I milieu de $[AB]$ » peut se traduire vectoriellement par : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$



On aurait pu écrire aussi : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ ou encore : $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IB}$.

SOUSTRACTION

Il n'y a pas besoin, à proprement parler, de soustraction de vecteurs. Il suffit d'interpréter les différences comme des **sommes algébriques** : $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$ s'interprète : $\left(\vec{u}\right)+\left(-\vec{v}\right)+\left(\vec{w}\right)$.

Une simple différence comme : $\vec{u}-\vec{v}$ doit systématiquement être pensée comme : $\vec{u}\ +\ \left(-\vec{v}\right)$.

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE L'ADDITION VECTORIELLE

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$	(commutativité)
$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$	(associativité)
$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$	(élément neutre)
$\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$	(élément symétrique)

DÉMONSTRATIONS

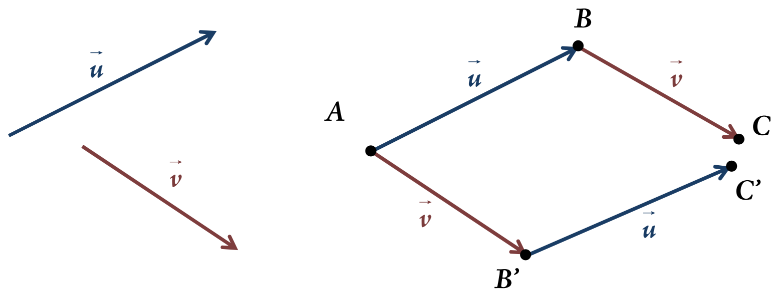
COMMUTATIVITÉ

Soit A un point quelconque.

Soient B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.

Soient B' tel que $\overrightarrow{AB'}=\vec{v}$ et C' tel que $\overrightarrow{B'C'}=\vec{u}$.

Il s'agit de prouver que $C=C'$, ce que je vous laisse en exercice. (L'idée est d'utiliser la géométrie classique. Ne cherchez pas des choses compliquées.)



J'espère que l'usage d'une figure volontairement fausse pour aider à trouver une démonstration ne vous perturbe pas trop.

ASSOCIATIVITÉ

Soit A un point quelconque du plan.

Soient B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ et D tel que $\overrightarrow{CD}=\vec{w}$.

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

$\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

ÉLÉMENT NEUTRE, ÉLÉMENT SYMÉTRIQUE

Soient B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.

$\vec{u}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

$\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

IV. MULTIPLICATION EXTERNE

PRINCIPE

Dans le plan, il n'y a pas de *produit vectoriel*. Il n'y a pas d'opération qui aurait des propriétés la faisant ressemble à une multiplication et qui, à partir de deux vecteurs, produirait encore un vecteur. Un tel *produit vectoriel* existe, mais dans l'espace, pas dans le plan et il n'est pas au programme du lycée actuellement. Il existe un « *produit scalaire* » : une opération qui, à partir de deux vecteurs, donne pour résultat un *nombre*. Elle est étudiée en première S. La « multiplication » que nous allons voir est encore autre chose : c'est la multiplication d'un vecteur par un nombre, le résultat étant un vecteur. Elle est intuitivement très simple à comprendre. Pour résumer :

Multiplication externe : nombre×vecteur → vecteur. (Seconde.)
Produit scalaire : vecteur×vecteur → nombre. (Première S.)
Produit vectoriel : vecteur×vecteur → vecteur. (Pas au lycée. Uniquement dans l'espace.)

Dans une multiplication, les deux *facteurs* n'ont pas, intuitivement, le même rôle. Il y a celui qui multiplie et qu'on appelle le **multiplicateur** et celui qui est multiplié et qu'on appelle le **multiplicande**. Ces mots étaient appris en primaire, jadis. Considérons l'expression : 2×3. Lorsqu'on la lit « deux fois**,** trois » c'est le 2 qui est actif et le 3 qui est passif. Lorsqu'on la lit « deux**,** multiplié par trois », c'est le 3 qui multiplie et le 2 qui est multiplié. Comme la multiplication est commutative, la distinction peut paraître superflue. Mais en fait, non.

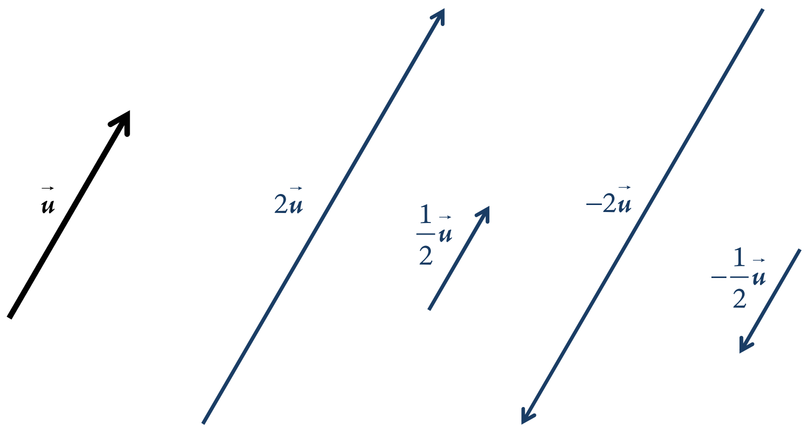
Considérons à présent un produit de deux nombres relatifs tel que $-2a$. Nous avons choisi de représenter le multiplicande par une variable et nous considèrerons que le multiplicateur est −2. L'action multiplicatrice de ce −2 peut se décomposer en deux parties : le 2 double la valeur absolue de a et le signe « − » prend l'opposé. Les choses sont ainsi agencées pour que l'on ait la « pseudo-associativité » suivante : $(-2)\times a = -(2\times a)$.

C'est exactement pareil avec les vecteurs : multiplier un vecteur par −2, c'est multiplier sa *norme* par 2 et changer son *sens*. La *direction*, elle, n'est pas modifiée. Si l'on multiplie un vecteur par +2, son *sens* n'est pas affecté.

DÉFINITION

Soient α un réel et $\vec{u}$ un vecteur.

- Si $\alpha\neq 0$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\alpha\vec{u}$ est le vecteur ayant :
  - même *direction* que $\vec{u}$
  - même *sens* si $\alpha>0$ et *sens* opposé si $\alpha<0$
  - pour *norme* : $|\alpha|\times\|\vec{u}\|$
- Si $\alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$, $\alpha\vec{u}$ est le vecteur nul.



REMARQUES

Rappelons que $|\alpha|$ est la *valeur absolue* de *alpha*.

La *multiplication externe* se note sans le signe « × », par une simple juxtaposition. On l'appelle externe car on ne reste pas dans l'ensemble des vecteurs : on fait intervenir un nombre.

Dans les calculs vectoriels, qui mélangerons donc des nombres et des vecteurs, les nombres, par opposition aux vecteurs sont appelés des **scalaires** : « *scalaire*, qui évoque les degrés d'un escalier ou ceux d'une échelle, renvoie à l'idée de comptage et donc de *nombre* (on parle d'échelle des valeurs), par opposition à un être mathématique qui ne serait pas un nombre, mais un vecteur. »[2]

Vous pouvez lire la suite de cette partie III assez rapidement et notamment en sautant les démonstrations, au moins dans un premier temps.

[2] Stella Baruk, *Dictionnaire des Mathématiques Élémentaires*.

COROLLAIRES

$$1\vec{u}=\vec{u}$$
$$(-1)\vec{u}=-\vec{u}$$
$$0\vec{u}=\vec{0}$$
$$\alpha\vec{0}=\vec{0}$$
$$(-\alpha)\vec{u}=-\left(\alpha\vec{u}\right)=\alpha\left(-\vec{u}\right)$$
$$\left\|\alpha\vec{u}\right\|=|\alpha|\times\left\|\vec{u}\right\| \quad \text{d'où : } -3\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BA}$$

Rappelons qu'**un corollaire** est, en mathématiques, une conséquence directe d'un théorème déjà démontré (ou ici, d'une définition).

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE DIMENSION 1

Soit $\vec{u}$ un vecteur et α et β deux réels.

$\alpha\left(\beta\vec{u}\right)=(\alpha\beta)\vec{u}$ (« pseudo-associativité »)

$(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ (distributivité « à gauche »)

Dans la seconde identité, on distribue depuis la droite, mais vers la gauche ; c'est pourquoi je parlerais plus volontiers, à l'instar de Wikipédia, de distributivité « à gauche ». Mais la plupart des livres de mathématiques parlent dans de tels cas de distributivité à droite.

DÉMONSTRATION

En dimension 1, on peut se placer sur un axe et identifier chaque vecteur à sa mesure algébrique. Alors, la multiplication des relatifs se superpose parfaitement à la multiplication externe et ces théorèmes se déduisent directement de ceux concernant les nombres relatifs.

Caractérisation de la colinéarité

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, avec $\vec{v} \neq \vec{0}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Démonstration (Qu'on pourra passer en première lecture.)

$\Leftarrow$ Immédiat, puisque la multiplication externe laisse intacte la direction du vecteur.

$\Rightarrow$ Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. $\vec{v}$ étant différent du vecteur nul, sa norme est différente de zéro. On peut donc poser : $k = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens et $k = -\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ sinon.

Alors, $\vec{u}$ et $k\vec{v}$ ont même *direction* (puisque $k\vec{v}$ est forcément colinéaire à $\vec{v}$ qui est colinéaire à $\vec{u}$) et ils ont même *sens*. Il reste à prouver qu'ils ont même *norme* : $\|k\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \times \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$.

Distributivité à gauche (dimension 2)

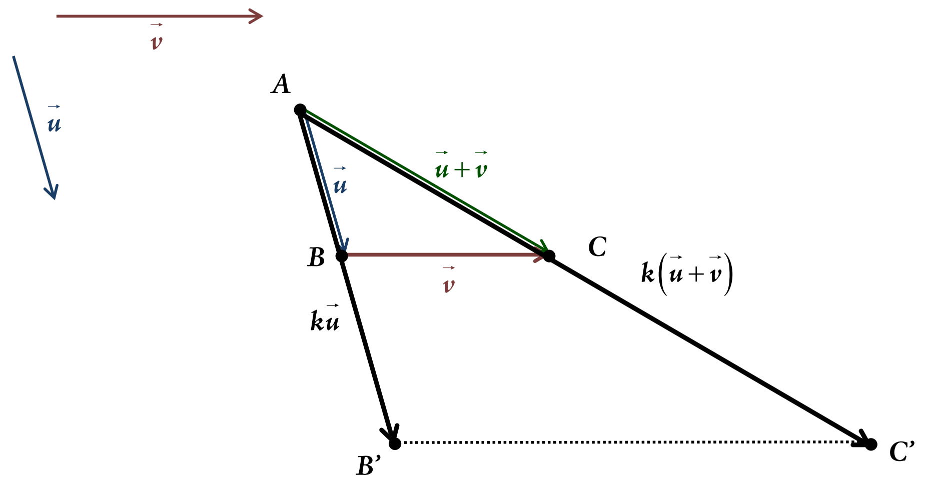
$$\boxed{\alpha\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}}$$

Corollaire

En posant $\alpha = -1$: $\boxed{-\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = -\vec{u} \ -\vec{v}}$

Démonstration

Soit A un point quelconque du plan, on définit les points A, B, C, B' et C' comme indiqué sur la figure suivante et l'on démontre par la réciproque du théorème de Thalès que $\overrightarrow{B'C'} = \alpha\vec{v}$. L'identité souhaitée provient alors immédiatement de : $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'}$



Définition vectorielle de l'homothétie

Soit O un point. Soit k un réel non nul. Soient M et M' deux points. On dit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k lorsque $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

V. Calcul vectoriel

Résumé

On a défini sur les vecteurs une addition, un signe opposé et une multiplication d'un vecteur par un nombre. Ces opérations obéissent à des règles similaires à celles des opérations de même nom sur les nombres relatifs. Les calculs vectoriels ne bousculeront donc pas vos habitudes.

Voici les huit propriétés algébriques élémentaires qui caractérisent ce la notions assez large d'**espace vectoriel** :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et quels que soient les *scalaires* α et β, on a :

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$ *associativité de l'addition*

$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ *existence d'un élément neutre de l'addition*

$\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$ *élément symétrique de chaque vecteur (pour l'addition)*

$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ *commutativité de l'addition*

$(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ *distributivité à droite*

$\alpha\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ *distributivité à gauche*

$\alpha\left(\beta\vec{u}\right)=(\alpha\beta)\vec{u}$ *pseudo-associativité*

$1\vec{u}=\vec{u}$ *l'élément neutre de l'ancienne multiplication est aussi celui de l'externe*

On a en outre (ce qui rattache le signe moins-opposé à la multiplication externe) : $-\vec{u}=(-1)\vec{u}$

À ces règles, il faut ajouter celles qui sont propres à la notation « *bipointesque* » (cf. p6) :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ *Relation de Chasles*

$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ En conséquence, on a par exemple : $-3\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BA}$.

Les *sommes algébriques* s'interprètent comme avec les relatifs :

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ doit se lire : $\overrightarrow{AB}$ $-\overrightarrow{BC}$ et signifie : $\overrightarrow{AB}$ + $\left(-\overrightarrow{BC}\right)$.

DIVISION

La division de deux vecteurs n'existe pas. Ainsi, l'expression $\frac{\vec{u}}{\vec{v}}$ n'a pas de sens.

Nous n'avons pas non plus défini de division d'un vecteur par un nombre. Ce serait possible, mais on s'en passe : au lieu d'écrire

« $\frac{\vec{u}}{2}$ », on écrira : $\frac{1}{2}\vec{u}$. Comme pour les réels, multiplier un vecteur par $\frac{1}{2}$ est une façon de le diviser par 2. Autrement dit :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k un réel non nul. On a :

$k\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}=\frac{1}{k}\vec{v}$

Ce que, rigoureusement, il faut démontrer en se ramenant uniquement aux règles de calcul que nous avons récapitulées :

$$\begin{aligned}
k\vec{u}=\vec{v} &\Leftrightarrow \frac{1}{k}\left(k\vec{u}\right)=\frac{1}{k}\vec{v}\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{k}\times k\right)\vec{u}=\frac{1}{k}\vec{v} \text{ (par « pseudo-associativité »)}\\
&\Leftrightarrow 1\vec{u}=\frac{1}{k}\vec{v}\\
&\Leftrightarrow \vec{u}=\frac{1}{k}\vec{v} \text{ (1 élément neutre de la multiplication externe)}
\end{aligned}$$

ÉQUATION VECTORIELLE

Ce que vous devez avant tout apprendre à faire, c'est résoudre une « équation vectorielle », c'est-à-dire une égalité, dont les membres sont des vecteurs, écrits à partir de points dont l'emplacement est bien connu et un point inconnu, un point dont on cherche à connaître la position. Supposons par exemple qu'on ait un triangle ABC donné et qu'on cherche à placer un point M tel que l'égalité suivante soit vérifiée : $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. Il faut voir cela comme une équation dont le point M est l'inconnue. Il s'agit alors de transformer cette égalité, de la rendre assez simple pour qu'elle nous livre la position du point M. Comme l'égalité est vectorielle, on ne pourra pas la mettre sous la forme « M = … ». On cherchera seulement à la mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{<point connu> <point inconnu>}} = \overrightarrow{\text{<vecteur connu>}}$$

Ainsi, l'égalité qui nous occupe équivaut à :

$$\overrightarrow{AM} = \underbrace{\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}_{\text{Vecteur connu (fabriqué uniquement à partir de points connus)}}$$

Point connu (à gauche)

Point inconnu (à droite)

Attention, le point connu doit être à gauche, dans le vecteur et le point inconnu à droite. L'idée étant de garantir l'existence et l'unicité du point M par le théorème de l'« unicité du translaté » (page 9).

On peut aussi mettre, de la même façon, l'égalité sous la forme :

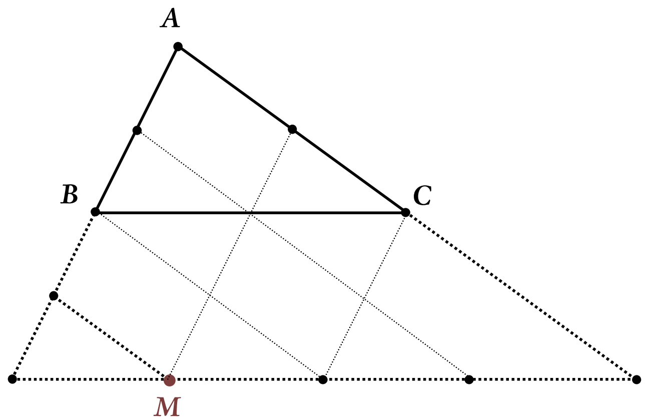
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$, ou $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, etc.

Le problème, c'est que, dans une équation vectorielle, les points ne se promènent pas tous seuls. Ils sont « attachés vectoriellement » à un autre point. Pour pouvoir réduire toute la partie « inconnue », comme on le fait dans une équation classique, il faudrait au moins que le point M soit toujours relié au même point *donné*. Par exemple A. Pour « détacher » le point M de B ou de C et « l'attacher » au point A, on peut utiliser <u>la relation de Chasles</u>, qui va nous permettre « d'intercaler » A, dans le vecteur $\overrightarrow{MB}$ et dans le vecteur $\overrightarrow{MC}$:

$$2\overrightarrow{MA}-3\underset{\substack{\uparrow\\ A}}{\overrightarrow{MB}} = \underset{\substack{\uparrow\\ B}}{\overrightarrow{MC}}$$

$$\begin{aligned}
& 2\overrightarrow{MA} -3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MA} -3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MA} -3\overrightarrow{MA} -3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} +\overrightarrow{AC}\\
\Leftrightarrow\ & -2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB} +\overrightarrow{AC}\\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} +\overrightarrow{AC}\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AB} +\overrightarrow{AC}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AB} +\overrightarrow{AC}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} +\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}
\end{aligned}$$

Une fois cette égalité obtenue on peut placer le point M :



On obtient évidemment le même emplacement avec les égalités $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$, ou $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, etc.

Erreurs courantes

- La relation de Chasles est souvent appliquée de façon approximative :

  $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC} \rightsquigarrow \overrightarrow{AC}$

  $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \rightsquigarrow 2\overrightarrow{AC}$

  $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \rightsquigarrow -\overrightarrow{AC}$

  Ou encore, dans l'autre sens (oubli des parenthèses) :

  $2\overrightarrow{BM} \rightsquigarrow 2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}$

  $-\overrightarrow{BM} \rightsquigarrow -\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}$

- Lors de la résolution d'une équation vectorielle, il arrive qu'étourdiment, l'on fasse « passer un terme de l'autre côté du signe égal », mais en prenant l'opposé de **<u>deux</u>** façon à la fois : en mettant un signe moins **<u>et</u>** en permutant les points du vecteur. Il faut choisir :

  $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\mathbf{CD}} = \overrightarrow{BD}$$

  $$\rightsquigarrow \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\mathbf{DC}} + \overrightarrow{BD}$$

- À la fin de la résolution d'une équation vectorielle, on peut s'estimer satisfait d'arriver à une égalité du genre : $\overrightarrow{\mathbf{M}B}=\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Une telle égalité prouve en effet l'existence et l'unicité du point M, mais elle rend sa localisation malaisée, car, dans « $\overrightarrow{\mathbf{M}B}$ », le point inconnu est le point de départ et le point connu est le point d'arrivée. Or, pour placer un point, on a besoin de partir d'un emplacement connu. Il faut donc que le point M soit à droite. Il suffit pour cela de prendre l'opposé des deux membres de l'égalité, ce qui donne ici : $\overrightarrow{B\mathbf{M}}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.